Løsninger til teoriprøven i landsfinalen til Den Danske Fysikolympiade 2006

1. To forbundne gasbeholdere

a) $p = p_0 + \frac{mg}{a} = 101{,}5\ \mathrm{kPa} + \frac{8{,}4\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}82\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}0150\ \mathrm{m}^2} = 106{,}999\ \mathrm{kPa} \approx \underline{\underline{107\ \mathrm{kPa}}}$.

b) Stemplet vil synke, indtil trykket i de to beholdere bliver p = 107,0 kPa. Da temperaturen er konstant bliver det nye rumfang V_x under stemplet:

$(V_x + V_B) \cdot p = V_A \cdot p + V_B \cdot p_B \Rightarrow V_x = V_A - V_B\left(1 - \frac{p_B}{p}\right)$. Stemplet synker således afstanden x:

$$x = \frac{V_A - V_x}{A} = \frac{V_B\left(1 - \frac{p_B}{p}\right)}{A} = \frac{4000\ \mathrm{cm}^3\left(1 - \frac{100{,}0}{107{,}0}\right)}{150\ \mathrm{cm}^2} = 1{,}7445\ \mathrm{cm} \approx \underline{\underline{1{,}74\ \mathrm{cm}}}.$$

2. Carbon-14 datering

a) 100 g carbon fra en levende organisme indeholder $1{,}3 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}100$ kg = $1{,}3 \cdot 10^{-13}$ kg C-14. Dette svarer til $N_0 = \frac{1{,}3 \cdot 10^{-13}\mathrm{kg}}{14 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\mathrm{kg}} = 5{,}594 \cdot 10^{12}$ C-14 atomer. Aktiviteten herfra er

$$A_0 = k \cdot N_0 = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}} \cdot N_0 = \frac{\ln 2}{5730 \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\ \mathrm{s}} \cdot 5{,}594 \cdot 10^{12} = 21{,}44\ \mathrm{Bq}.$$

Aktiviteten fra knoglen er A = 6,5 Bq. Af $A = A_0 \cdot \exp(-kt)$ fås knoglens alder t:

$$t = \frac{T_{\frac{1}{2}}}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = \frac{5730\ \text{år}}{\ln 2} \ln\left(\frac{21{,}44}{6{,}5}\right) = 9{,}866 \cdot 10^3\ \text{år} \approx \underline{\underline{9{,}9 \cdot 10^3\ \text{år}}}.$$

3. Kapillareffekt

a) Enheden for overfladespændingen omskrives: $[\gamma] = \mathrm{J \cdot m^{-2}} = (\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}) \cdot \mathrm{m^{-2}} = \mathrm{kg \cdot s^{-2}}$.
Hvis kg skal udgå, må vi danne brøken γ/ρ med enheden $[\gamma/\rho] = (\mathrm{kg \cdot s^{-2}})/(\mathrm{kg \cdot m^{-3}}) = \mathrm{m^3 \cdot s^{-2}}$.
Hvis $\mathrm{s^{-2}}$ skal udgå, må vi dividere brøken med $g = 9{,}82\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$: $[\gamma/(\rho g)] = (\mathrm{m^3 \cdot s^{-2}})/(\mathrm{m \cdot s^{-2}}) = \mathrm{m^2}$.
Altså fås udtrykket $\underline{\underline{a \approx \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}}}$. Værdien af dette udtryk er: $a \approx \sqrt{\frac{0{,}076}{1{,}00 \cdot 10^3\ 9{,}82}}\ \mathrm{m} = \underline{\underline{2{,}8\ \mathrm{mm}}}$.

4. Slangebøsse

a) Størrelsen af kraften, hvormed slangebøssen er forspændt er $F_0 = k(a-L)$.

b) Når snoren er trukket tilbage er dens længde $L_1 = 2\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2}$. Derfor er snorkraftens størrelse nu: $F_s = k(L_1 - L)$. Da der er ligevægt gælder, at den nødvendige kraft $F_1 = 2F_s \cos\theta$, hvor $\cos\theta = \frac{b}{\frac{1}{2}L_1}$. Vi finder således: $F_1 = 2k\left(2\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2} - L\right)\cdot \frac{b}{\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}} = \underline{\underline{4bk\left(1 - \frac{L}{2\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}}\right)}}$.

c) Af energibevarelse fås den søgte fart v:

$\frac{1}{2}m\cdot v^2 = \frac{1}{2}k\left((L_1-L)^2 - (a-L)^2\right) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}\left((L_1-L)^2-(a-L)^2\right)}$ eller ved indsættelse af $L_1 = 2\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}$ fås efter lidt regneri: $\underline{\underline{v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(4b^2 + 2aL - 4L\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}\right)}}}$.

5. Strømstyrken i et lyn

a) Den energi, der afsættes i ledningen er, $E_a = R\cdot I^2\Delta t$, her er resistansen $R = \rho\frac{l}{a}$. Det antages, at resistiviteten ρ er gennemsnittet af resistiviteten ved 0 °C og ved smeltepunktet 1083 °C:

$$\rho = \rho_0\left(1+\alpha_0\cdot\tfrac{1}{2}\Delta T\right) = 1{,}68\cdot10^{-8}\,\Omega\text{m}\cdot\left(1+4{,}0\cdot10^{-3}\,\text{K}^{-3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot1083\,\text{K}\right) = 5{,}32\cdot10^{-8}\,\Omega\text{m}.$$

Den modtagne energi under opvarmningen til smeltning begynder, er
$E_m = c\cdot m\cdot\Delta T = c\cdot\mu\cdot a\cdot l\cdot\Delta T$.

Hvis vi ser bort fra varmetab: $E_a = E_m \Rightarrow \rho\frac{l}{a}\cdot I^2\cdot\Delta t = c\cdot\mu\cdot a\cdot l\cdot\Delta T \Rightarrow a^2 = \frac{\rho\cdot I^2\cdot\Delta t}{c\cdot\mu\cdot\Delta T}$.

Den søgte diameter d fås, idet tværsnitsarealet $a = \frac{1}{4}\pi\cdot d^2$:

$$d = \left(\frac{4\rho\cdot I^2\cdot\Delta t}{\pi\cdot c\cdot\mu\cdot\Delta T}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{4\cdot5{,}32\cdot10^{-8}\,\Omega\text{m}\cdot(250\cdot10^3\,\text{A})^2\cdot1{,}0\cdot10^{-3}\,\text{s}}{\pi\cdot387\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\cdot8{,}93\cdot10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot1083\,\text{K}}\right)^{\frac{1}{4}} = 5{,}799\cdot10^{-3}\,\text{m} \approx \underline{\underline{5{,}8\,\text{mm}}}.$$

Kobberlederens diameter bør således være mindst ca. 6 mm.

6. GPS-satellit

a) Ved at benytte jævn cirkelbevægelse og Newtons gravitationslov (eller Keplers 3. lov) fås:

$$G\frac{Mm}{{r_S}^2} = m\omega^2 r_S \quad\Rightarrow\quad r_S = \left(\frac{{T_S}^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = \underline{\underline{2{,}66\cdot10^7\,\text{m}}}.\ \text{Heraf følger } v_S = \frac{2\pi r_S}{T_S} = \underline{\underline{3{,}87\cdot10^3\,\text{m/s}}}.$$

b) Afstanden er $L = r_S - r_J = (26{,}6 - 6{,}37)\cdot10^6\,\text{m} = 20{,}2\cdot10^6\,\text{m}$. Signaltiden er

$$\tau = \frac{L}{c} = \frac{20{,}2\cdot10^6\,\text{m}}{3{,}00\cdot10^8\,\text{m/s}} = \underline{\underline{67{,}4\,\text{ms}}}. \qquad \text{Nøjagtighed: } \frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta L/c}{\tau} = \frac{1\,\text{m}/(3{,}00\cdot10^8\,\text{m/s})}{6{,}74\cdot10^{-2}\,\text{s}} = \underline{\underline{4{,}96\cdot10^{-8}}}.$$

c) Der gælder $\Delta t_S = A\Delta t$, så $\frac{\Delta t_S - \Delta t}{\Delta t} = A - 1 = \left(-\frac{GM}{c^2 r_S} - \frac{1}{2}\left(\frac{v_S}{c}\right)^2 + \frac{GM}{c^2 r_J} + \frac{1}{2}\left(\frac{v_J}{c}\right)^2 \right) = \underline{\underline{4{,}47 \cdot 10^{-10}}}$.

Ved multiplikation med et døgn kan denne relative forskel udtrykkes som $\underline{\underline{38{,}6\ \mu\text{s/døgn}}}$.

d) ΔL = 38,6 μs/døgn ·$3 \cdot 10^8$ m/s = $\underline{\underline{11{,}6\ \text{km/døgn}}}$, så systemet ville være ubrugeligt uden de relativistiske korrektioner. Da man i 1980'erne første gang opsendte satellitter med atomure troede ingeniørerne ikke helt på korrektionerne fra den generelle relativitetsteori, og havde derfor "slået dem fra". Efter et døgn var de nødt til at slå dem til!

e) Hvis urene går ens, er $\Delta t = \Delta t_S$, så følgende ligning i r_S fremkommer, idet der indsættes at $v_S{}^2 = \frac{GM}{r_S}$ (jævn cirkelbevægelse): $0 = -\frac{GM}{c^2 r_S} - \frac{1}{2}\frac{GM}{r_S c^2} + \frac{GM}{c^2 r_J} + \frac{1}{2}\left(\frac{v_J}{c}\right)^2$.

Ved omrokering findes $r_S = \left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{r_J}\right) + \frac{1}{2}\frac{v_J{}^2}{GM} \right)^{-1} = \underline{\underline{9{,}54 \cdot 10^6\ \text{m}}}$.

7. Forholdet *e/m* mellem elektronens ladning og masse

a) En elektron er påvirket af kraften $F = E \cdot e = \frac{U}{d}e$, som ifølge Newtons 2. lov giver anledning til accelerationen: $a = \frac{U \cdot e}{m \cdot d}$. Den vandrette hastighed v er konstant: $v = \frac{L}{t} \Rightarrow t = \frac{L}{v}$. Hastighedens i y-aksens retning lige efter passage af pladerne: $v_y = a \cdot t = \frac{U \cdot e}{m \cdot d} \cdot \frac{L}{v}$ y-koordinaten for elektronen idet den træder ud fra pladerne er $y_0 = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{1}{2}\frac{U \cdot e}{m \cdot d}\left(\frac{L}{v}\right)^2$. Den tid, som elektronen er om at bevæge sig fra pladerne stykket D er: $t = \frac{D}{v}$. Vi finder således, at y-koordinaten er

$$y = y_0 + v_y t = \frac{1}{2}\frac{U \cdot e}{m \cdot d}\left(\frac{L}{v}\right)^2 + \frac{U \cdot e}{m \cdot d} \cdot \frac{L}{v} \cdot \frac{D}{v} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{U \cdot e}{m \cdot d \cdot v^2}\left(\tfrac{1}{2}L^2 + L \cdot D\right)}}.$$

b) Hvis elektronen skal gå igennem uden afbøjning, må der gælde, at den elektriske og magnetiske kraft mellem pladerne hele tiden er lige stor og modsat rettede: $e \cdot \frac{U}{d} = B \cdot e \cdot v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{U}{B \cdot d}$.

Ved indsætning i formlen fås herefter det ønskede resultat:

$$y = \frac{e \cdot B^2 \cdot d}{m \cdot U}\left(\tfrac{1}{2}L^2 + L \cdot D\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{e}{m} = \frac{y \cdot U}{B^2 \cdot d} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}L^2 + L \cdot D}}}$$